Michel Plancherel

Martine Schmutz

14 janvier 2005

Table des matières

1 Sa vie **3**
1.1 Donat Plancherel, père de Michel 3
1.2 Michel Plancherel 3
1.2.1 L'étudiant 3
1.2.2 Le professeur 4
1.2.3 L'homme publique 5
1.2.4 Le Colonel 5
1.2.5 L'homme généreux 5
1.2.6 L'homme croyant 6
1.3 Cécile Plancherel-Tercier 6

2 Son oeuvre **7**
2.1 Générale 7
2.2 Le théorème de Plancherel 8
2.2.1 Introduction historique à l'analyse de Fourier 8
2.2.2 Rappel : la théorie de la transformée de Fourier sur L^1 13
2.2.3 La théorie L^2 et le théorème de Plancherel 13

3 Fonctions diverses **14**

4 Sociétés scientifiques **15**

5 Distinctions **15**

6 Publications **15**

1 Sa vie

1.1 Donat Plancherel, père de Michel

Né en 1863 à Bussy, un village dans le disctrict de la Broye du canton de Fribourg, non loin d'Estavayer. Instituteur à Villaz-Saint-Pierre puis à Bussy. Dès 1892, la famille Plancherel, composée de Justine et de 8 enfants (dont 2 moururent en bas âge) s'installa à Fribourg où Donat Plancherel occupa simultanément les postes d'administrateur de l'imprimerie St-Paul (gérance des ses ateliers et de ses diverses publications), de professeur au Collège St-Michel (1896-1912) et à l'Ecole secondaire de jeunes filles où il était chargé des cours de comptabilité et de calcul commercial.
De par sa fonction à l'imprimerie St-Paul il eut un contact direct avec *La Liberté* dont les rédacteurs appréciaient ses connaissances en comptabilité, son esprit d'ordre et de conciliation, son affabilité et sa droiture parfaite. Ces qualités, unies à un travail acharné, et le souci constant d'améliorer les instruments de travail dont il avait la garde le rendirent indispensable au sein de l'équipe de l'imprimerie. Il fit encore bénéficier de sa science et de son expérience la chose publique, à laquelle il se dévoua durant les législatures qu'il passa au conseil général de la Ville de Fribourg. Les rapports qu'il présentait, en tant que rapporteur financier, étaient décrits comme un modèle de concision et de clarté.
Il décéda à Fribourg le 27 mai 1912 à l'âge de 49 ans.

1.2 Michel Plancherel

Michel Plancherel est né le 16 janvier 1885 à Bussy. Il est l'aîné des 8 frères et soeurs qui composaient la famille Plancherel. Son père était alors tout jeune maître d'école.
Il n'avait que 7 ans lorsque la famille déménagea à Fribourg.

1.2.1 L'étudiant

Il fit donc ses études au Collège St-Michel, dans les classes de la section dite industrielle de ce temps-là, qui préparait en particulier les candidats à l'Ecole polytechnique fédérale. Ayant le goût et des dispositions

spéciales pour les mathématiques, il s'inscrivit à la Faculté des sciences à l'université de Fribourg de 1903 à 1907, où il eut comme professeurs les mathématiciens hollandais et tchèque Daniëls et Lerch. Mathias Lerch avait la chaire de mathématiques pures et effectuait ses recherches principalement dans la théorie des nombres. Michel Plancherel fit sous sa direction une thèse brillante dans cette partie et obtint en 1907 son doctorat ès sciences mathématiques, à la veille du départ de son maître, appelé à l'Université de Brünn, en Moravie. Sa thèse s'intitule : "Sur les congruences (mod 2^m) relatives au nombre des classes des formes quadratiques binaires aux coefficients entiers et à discriminant négatif", tout un programme ! Il avait rédigé cette thèse en partie pendant une période de service militaire.
Avec l'aide d'une bourse de l'Etat, il continua ses études à l'Université de Göttingen (1907-1909) et à Paris (1909-1910). A Göttingen, il suivit en particulier les cours de Félix Klein, David Hilbert et Edmund Landau. Il fit là-bas la connaissances de Hermann Weyl aux côtés duquel il devait plus tard enseigner à l'Ecole polytechnique fédérale pendant une dizaine d'années ; à la Sorbonne et au Collège de France enseignaient alors Picard, Lebesgue, Goursat, Hadamard et d'autres, soit les grands noms de la mathématique française de cette époque.

1.2.2 Le professeur

En 1910, il fut nommé privat docent de mathématiques à l'université de Genève et dès 1911 professeur extraordinaire puis ordinaire (1913) chez nous, à Fribourg, comblant ainsi la lacune laissée, à côté de la chaire de mathématiques appliquées du professeur Daniëls, par le départ de Lerch en 1906. Il refusa alors des appels de Berne et de Lausanne. Il y resta jusqu'en 1920 quand il devint professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique fédérale de Zürich, succédant au professeur Adolphe Hurwitz, et il s'établit à Zürich, où il occupa la chaire de mathématiques supérieures pendant 35 ans, jusqu'à sa retraite en 1955.
La confiance de ses collègues le porta à la dignité de recteur de l'EPF qu'il revêtit de 1931 à 1935.
A l'Ecole polytechnique fédérale, il enseignait surtout à la Section des Mathématiques, mais donna aussi des cours aux sections des ingénieurs mécaniciens et des ingénieurs électriciens. Ses exposés étaient clairs, bein que son débit rapide en français ne fut pas toujours facile à saisir. Aux examens, il était d'une sévérité militaire, mais toujours correct et juste. Il appliquait à ses élèves à peu près la discipline à laquelle il s'était soumis lui-même.
Michel Plancherel était avant tout un savant. Ses travaux de haute valeur scientifique forment une suite ininterrompue. Ses recherches se distinguaient

par leur maturité et leur précision, ses cours, par leur clarté pénétrante, leur animation entraînante et l'élégance de sa ditcion. Sous sa direction magistrale sont nées un grand nombre de thèses de valeur, qui ont éveillé, dans les milieux spécialisés, plus d'écho que ce n'est habituellement le cas pour des travaux de ce genre.

1.2.3 L'homme publique

En dépit de sa réserve personnelle et bien qu'il fut dépourvu de tout orgueil et de toute envie de se mettre en avant, Michel Plancherel n'était pas seulement un homme de salle d'étude. Ses collègues surent reconnaître ses éminents talents d'organisateur et le choisirent comme l'un des premiers présidents de la Société suisse de mathématiques, comme vice-président du Congrès international de mathématiques de 1932 à Zürich, comme président de la Fondation pour la recherche mathématique et de nombreuses autres institutions au service des hautes études, de la science et de l'économie.
Pour l'encouragement à la relève universitaire et l'unification du niveau de la culture dans l'ensemble de la Suisse, il a fonctionné pendant environ 30 ans comme membre et comme président de la Commission fédérale des examens de maturité.
En 1929, Michel Plancherel avait créé avec d'autres personnalités qui partageaient son avis, la Fondation suisse pour l'avancement des Sciences mathématiques, qu'il a présidée pendant de longues années.

1.2.4 Le Colonel

Au militaire, Michel Plancherel avait le grade de colonel. En 1939, il a été appelé à l'état-major de l'armée et a dirigé, pendant les années critiques de la deuxième guerre mondiale, la division Presse et Radio. C'est précisément à ce poste des plus délicats qu'il devait faire preuve de la valeur de son caractère : calme réfléchi, impartialité, intégrité absolue et sens de l'essentiel, tout cela uni au tact et à l'esprit de conciliation.

1.2.5 L'homme généreux

Sous le manteau du colonel battait pourtant aussi un coeur chaleureux et secourable, comme l'a prouvé son dévouement à l'Oeuvre de secours en faveur des étudiants réfugiés en Suisse. En 1956, après la fuite en Suisse d'environ 550 étudiants, la Conférence des recteurs avait créé une Commission de financement, dont le seul membre agissant fut le professeur Plancherel, qui parvint à réunir plus de 2 millions de francs.
Pendant la crise économique mondiale postérieure à 1930, on a pu le voir

fonctionner comme directeur plein d'initiative du Service volontaire de travail. Le Secours suisse d'hiver réclama ses services comme président à partir de 1948 et il fut un protecteur inlassable des étudiants hongrois réfugiés.

1.2.6 L'homme croyant

Sa force, Michel Plancherel la trouvait dans ses convictions chrétiennes. Il était lié d'amitié avec les catholiques zürichois de langue française ; il présidait la Mission catholique française.
En dépit de toute cette activité, Michel Plancherel n'était pas un homme public, mais toujours uniquement un homme cherchant, par simple conscience de ses responsabilités, à accomplir modestement et fidèlement un devoir qu'il considérait comme allant de soi.
Il mourut le 4 mars 1967 à Zürich. La mort s'est présentée à lui de façon inattendue. En pleine possession de ses facultés physiques et d'une fraîcheur intellectuelle enviable, Michel Plancherel a été violemment heurté par un véhicule le soir du 1^{er} mars, alors qu'il revenait de l'Ecole polytechnique fédérale où il avait siégé comme expert des examens fédéraux de maturité. Comme de coutume, il regagnait à pied son foyer de Zürichberg. Il a succombé à ses graves blessures le 4 mars 1967 sans avoir repris connaissance.

1.3 Cécile Plancherel-Tercier

Cécile Tercier est née le 15 janvier 1891, à l'Adrey, magnifique ferme fribourgeoise située à une demi-heure de Vuadens, en Gruyère.
Après avoir suivi l'école primaire de son village natal, elle compléta son instruction à l'Institut Sainte-Croix à Bulle et aux pensionnats de Melchtal et de Zoug.
En 1913, elle fut brillante élève de l'Ecole d'infirmière de Fribourg qui venait d'ouvrir ses portes. Ses camarades appréciaient son caractère enjoué, sa finesse et sa belle intelligence.
Elle séjourna plusieurs mois à Rome en s'occupant de nourrissons retrouvés dans les ruines d'Avezzan, lors du tremblement de terre qui détruisit cette localité.

Elle épousa le 8 septembre 1915 Michel, alors professeur à la Faculté des Sciences à l'Université de Fribourg. Lorsqu'il fut appelé en 1920 à l'Ecole polytechnique fédérale de Zürich, elle quitta Fribourg avec sa famille en 1921.
Cécile et Michel eurent 9 enfants, cinq garçons et 4 filles. Deux de ses filles, Marthe (soeur Marie Cornelia) et Marguerite ont été élèves de l'Ecole d'infirmière de Fribourg. Quatre enfants sont mariés et treize petits-enfants ont fait la joie de ses derniers jours.
Energique, active, pleine d'entrain, elle s'est dépensée sans compter pour sa famille et pour les oeuvres de la Mission catholique française de Zürich. Une maladie de coeur l'obligea à suspendre ses activités et à garder le lit depuis novembre 1952. Le 24 novembre, elle s'éteignait doucement.

2 Son oeuvre

2.1 Générale

Sur le plan de la science, Michel Plancherel s'est occupé surtout de problèmes d'analyse réelle et de la théorie des séries de Fourier. Deux théorèmes de Plancherel ont acquis la célébrité et appartiennent aujourd'hui au bagage classique des mathématiques.
La production scientifique ne resta pas non plus sans écho à l'étranger et lui valut de nombreux appels, par exemple du Pérou, d'Egypte, du Japon, des Etats-Unis. Dans sa modestie bien connue, il n'en parlait pourtant jamais, ni n'en tira des avantages. Divers honneurs lui furent attribués, en Suisse et à l'étranger, et c'est ainsi par exemple qu'il était membre correspondant de l'Académie royale de Turin et membre d'honneur de diverses associations scientifiques.
Michel Plancherel s'est occupé principalement d'analyse, de physique mathématique et d'algèbre. Dans une série de travaux datant des années 1910, il s'est consacré à transmettre des résultats de l 'analyse de Fourier classique à des espaces fonctionnels généraux (espaces de Hilbert) en étudiant la sommation, la représentation de fonctions par des séries de Fourier resp. des intégrales de Fourier tout comme les transformations intégrales (transformations de Fourier et Laplace) de différents systèmes de fonctions orthogonales (polynômes de Legendre, séries de Fourier entre autre). Il obtint des résultats fondamentaux, parmi lesquels le théorème de Plancherel, le résultat plus connu comme théorème fondamental de l'analyse harmonique.
Ces résultats, parmi tant d'autres, il les appliqua à l'étude d'équations différentielles partielles hyperboliques et paraboliques, de l'équation intégrale singulière, à la solution de problèmes de variation avec le procédé de Ritz tout

comme à la théorie ergodique. Il donna par exemple en 1913 une preuve pour l'impossibilité de systèmes ergodiques mécaniques. En algèbre, il obtint surtout des résultats dans la théorie des formes quadratiques et leurs applications, dans la résolution de systèmes d'équation avec une infinité de variables et à la théorie des algèbres de Hilbert commutatives (théorème de Plancherel-Godemet).

2.2 Le théorème de Plancherel

2.2.1 Introduction historique à l'analyse de Fourier

"Les questions de la théorie de la chaleur offrent autant d'exemples de ces dispositions simples et constantes qui naissent des lois générales de la nature ; et si l'ordre qui s'établit dans ces phénomènes pouvait être saisi par nos sens, ils nous causeraient une impression comparable à celles des résonances harmoniques" (Jean-Baptiste Joseph Fourier)
Les fonctions périodiques apparaissent très fréquemment dans la nature : pendule, signaux électriques,... Les fonctions trigonométriques sont les fonctions périodiques les plus simples. Le problème de la décomposition d'une fonction en série de Fourier est le suivant : quelles types de fonctions s'écrivent (se décomposent) comme somme des ces fonctions périodiques élémentaires ? Autrement dit, est-ce que la série de Fourier de f converge ? En quel sens ? Si oui, est-ce vers f ? Ces questions, abordées à la suite des travaux de Joseph Fourier sur l'équation de chaleur en 1830, ont suscité beaucoup de travaux chez les plus grands mathématiciens (Dirichlet, Cantor, Lebesgue), et font encore l'objet de recherches actives.
L'idée a surgit naturellement de problèmes en astronomie ; en fait, on a découvert que les Babyloniens utilisaient une forme primitive de séries de Fourier pour la prédiction d'événements célestes.
Un des problèmes les plus intéressants qui occupa les scientifiques du XVIII siècle et qui se présente fréquemment en physique dans les problèmes en relation avec des processus oscillatoires, fut celui de corde vibrante. On peut décrire la situation la plus élémentaire de la manière suivante : supposons qu'on tende une corde flexible et que ses extrémités sont fixées aux points $(0, 0)$ et $(0, \pi)$ sur l'axe des abscisses. On tire alors la corde vers le haut jusqu'à ce qu'elle prenne la forme d'une courbe donnée par l'équation $y = f(x)$ et on la lâche. La question qui se pose est : quel est le mouvement décrit par la corde ? Si ses déplacements se trouvent toujours dans le même plan et si le vecteur du déplacement est perpendiculaire, à tout moment, à l'axe des abscisses, le mouvement sera alors donné par une fonction $u(x, t)$ représentant le déplacement vertical de la corde, où $0 \leq x \leq \pi$ est la position et $t \geqslant 0$.

Donc, pour chaque valeur fixée de t, $u(x,t)$, comme fonction de $x \in [0,\pi]$ est la forme qu'aura la corde à ce moment t. Le problème qui se pose est obtenir $u(x,t)$ à partir de $f(x)$. Le premier qui élabora un modèle approprié pour ce problème fut d'Alembert (1747) qui montra que la fonction $u = u(t,x)$ doit satisfaire les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \partial^2 u/\partial t^2 &= \partial^2 u/\partial x^2 && t > 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(x,0) &= f(x) && \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 && 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0 && t \geqslant 0. \end{aligned}$$

La première condition est une équation aux dérivées partielles de $2^{\text{ème}}$ ordre connue sous le nom d'équation d'onde. La deuxième condition représente la position initiale de la corde, tandis que la troisième nous dit que la vitesse initiale est nulle. La dernière exprime le fait que les extrémités de la corde sont fixes. D'Alembert démontra que la solution du problème est donnée par

$$u(t,x) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)],$$

où $\tilde{f}$ est un prolongement adéquat de la fonction f.

Le résultat de d'Alembert confirma que la position future de la corde est complétement déterminée par sa position initiale.

L'interprétation physique de la solution de d'Alembert est très intéressante : la fonction $\frac{1}{2}\tilde{f}(x+t)$ représente une onde qui se déplace vers la gauche à vitesse 1 et de manière analogue, la fonction $\frac{1}{2}\tilde{f}(x-t)$ représente une autre onde qui se déplace vers la droite à vitesse 1. La solution du problème est donc la superposition de deux ondes.

Euler (1748) proposa qu'une telle fonction peut se prolonger en une série de sinus :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

avec la conséquence que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) \sin(n\pi x).$$

L'harmonique simple $\cos(n\pi t)\sin(n\pi x)$ est interprétée comme un mode fondamental de la corde et la fréquence $n/2$ comme un de ses tons fondamentaux.

La même idée était avancée par D. Bernoulli (1753) et Lagrange (1759).
La recette pour trouver les coefficients

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx,$$

plus tard associés au nom de Fourier, apparaît pour la première fois dans un article de Euler.
La contribution de Fourier commence en 1807 avec son étude sur le problème de la propagation de la chaleur

$$\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$$

présenté à l'Académie des Sciences en 1811 et publié en partie sous le nom de *Théorie analytique de la chaleur* (1822). Il fit une sérieuse tentative pour prouver que toute fonction lisse par morceaux f peut être prolongée en une série trigonométrique. Une preuve satisfaisante a été trouvée par après par Dirichlet (1829). Riemann (1867) fit également d'importantes contributions à ce problème.
La clef pour de nouvelles avancées fut donnée par la nouvelle intégrale de Lebesgue (1904). Les séries de Fourier est la classe des fonctions f Lebesgue mesurables avec

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Au sujet de la série de Fourier se poseront, d'une part, la question de l'unicité du développement, d'autre part, celle de l'existence d'une limite pour les différents modes de convergence imaginables.
En effet, la convergence est étudiée très tôt dans l'espace de Hilbert L^2. Parlant du procédé général de la résolution d'équations intégrales linéaires mis au point par Hilbert, F. Riesz met l'accent sur l'importance du problème suivant :
Soit (ϕ_i) un système orthonormé réel de fonctions définies sur $[a,b]$;
$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x)dx = 0$ si $i \neq j$, $\int_a^b \phi_i^2(x)dx = 1$. A toute fonction ϕ_i est associé un nombre réel a_i. Sous quelles conditions existe-t-il une fonction f telle que $\int_a^b f(x)\phi_i(x)dx = a_i$ quel que soit i ? F. Riesz démontre que, pour qu'il existe $f \in L^1_{\mathbb{R}} \cap L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ de ce type une condition nécessaire et suffisante est la convergence de $\sum\limits_i a_i^2$.
Un peu antérieurement à F. Riesz et indépendamment de lui, Fischer obtient un résultat équivalent, mais qu'il publie un peu plus tard. Il commence par établir les importantes formules généralisant la convergence des séries. Soit

$\Omega = L^1_{\mathbb{R}}([a,b]) \cap L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$. Si $f, g \in \Omega$, alors $fg \in L^1_{\mathbb{R}}([a,b])$,

$$\Big(\int_a^b fg(x)dx\Big)^2 \leq \Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big)\Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big)$$

et aussi

$$\Big(\int_a^b (f+g)(x)^2dx\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_a^b f(x)^2dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_a^b g(x)^2dx\Big)^{1/2}.$$

Fischer en déduit que si (f_n) constitue une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_2$ dans Ω, elle converge vers un élément de Ω relativement à cette norme. Soit maintenant la famille orthonormée (ϕ_n) dans Ω. Si la série $\sum a_i^2$ de $\mathbb{R}_+$ converge, $\sum a_i\phi_i$ converge vers $f \in \Omega$ dans $L^2_{\mathbb{R}}([a,b]); a_n = \int_a^b f\phi_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Ici se place le mémoire (*Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies*) dans lequel Plancherel fait prendre conscience de certains aspects essentiels de l'analyse de Fourier. Il attribue aux travaux de Fredholm l'impulsion qui a donné naissance aux recherches sur le développement d'une fonction réelle d'une variable réelle en série de fonctions orthogonales dont *"le type le plus important et le plus anciennement connu"* est le développement en série de Fourier d'une fonction définie sur $[0, 2\pi]$. Il observe que la théorie de Fredholm fournit des conditions suffisantes, mais que les travaux de Weyl et de Haar montent qu'elles sont *"bien loin d'être nécessaires"*.

Plancherel considère dans $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ une suite de fonctions (ϕ_p) telle que $\int_a^b \phi_p(x)^2dx = 1$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $\int_a^b \phi_p(x)\phi_q(x)dx = 0$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q$. Il y adjoint l'ensemble $l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$ des suites réelles (a_n) telles que $\sum_{n=1}^\infty a_n^2$ converge. La suite (ϕ_p) est dite complète s'il n'existe pas de fonction ψ dans $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$, ne faisant pas partie de la suite, telle que $\int_a^b \psi(x)^2dx = 1$ et $\int_a^b \psi(x)\phi_p(x)dx = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité de Schwarz lui permet d'associer à $f \in L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ et $p \in \mathbb{N}^*$, le *coefficient de Fourier*

$$c_p = \int_a^b f(x)\phi_p(x)dx.$$

De l'identité de Bessel

$$\int_a^b \big(f(x) - \sum_{p=1}^n c_p\phi_p(x)\big)^2dx = \int_a^b f(x)^2dx - \sum_{p=1}^n c_p^2$$

découle l'inégalité

$$\sum_{p=1}^n c_p^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx;$$

donc (c_n) appartient à $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$.
Ce cadre général fixé, Plancherel établit une nouvelle démonstration du résultat de F. Riesz et Fischer. Si $a = (a_n) \in l^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}^*)$ et $f_p = \sum_{n=1}^p a_n\phi_n, (f_p)$ converge dans $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$.
D'après une propriété déjà établie par Weyl, il doit alors exister une fonction f dans $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ vers laquelle une sous-suite de (f_p) converge presque partout ; f est unique à sa détermination sur un ensemble de mesure nulle près. De l'inégalité

$$\Big(\int_a^b (f(x) - f_q(x))\phi_p(x)dx\Big)^2 \leq \int_a^b (f(x) - f_q(x))^2 dx \int_a^b \phi_p(x)^2 dx$$

découle

$$\int_a^b f(x)\phi_p(x)dx = \lim_{q\to\infty} \int_a^b f_q(x)\phi_p(x)dx = a_p.$$

De même,

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b (f(x) - f_p(x))f(x)dx = 0,$$

donc

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \lim_{p\to\infty} \int_a^b f(x)\Big(\sum_{n=1}^p a_n\phi_n(x)\Big)dx,$$

i.e.,

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \sum_{p=1}^\infty a_p^2.$$

De ces observations Plancherel déduit l'importante conclusion suivante : si, en particulier, la suite (ϕ_p) est complète, à toute suite (a_n) de nombres réels dont la série des carrés converge, est associée exactement une fonction f de $L^2_{\mathbb{R}}([a,b])$ dont le coefficient de Fourier $\int_a^b f(x)\phi_p(x)dx$ est a_p, quel que soit $p \in \mathbb{N}^*$; pour cette fonction on a

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \sum_{p=1}^\infty \Big(\int_a^b f(x)\phi_p(x)dx\Big)^2.$$

Le résultat, connu sous le nom de formule de Plancherel, donnera lieu à une gamme ininterrompue de travaux d'extension. Pour une fonction définie sur $[-\pi,\pi]$ et les coefficients de Fourier associés, l'identité a été établie par Parseval en 1799 d'une manière formelle, c'est-à-dire en l'abscence de considérations de convergence.
Qualifiant le résultat de théorème de Riesz-Fischer, Plancherel note encore

que si $(a_p), (b_p)$ sont les suites constituées par les coefficients de Fourier des fonctions $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}([a, b])$, il a la *formule de Riesz*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{p=1}^{\infty} a_p b_p$$

2.2.2 Rappel : la théorie de la transformée de Fourier sur L^1

On travaillera avec différents espaces définis sur $\mathbb{R}^n$. Le plus simple est l'espace $L^p = L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p < \infty$ qui contient toutes les fonctions mesurables f tel que $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$. Le nombre $\|f\|_p$ est appelée la norme L^p de f.
L'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ contient les fonctions essentiellement bornées de $\mathbb{R}^n$ et pour $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, soit $\|f\|_\infty$ le supremum essentiel de $|f(x)|, x \in \mathbb{R}^n$.
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. La *transformée de Fourier de* f est la fonction $\hat{f}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

2.2.3 La théorie L^2 et le théorème de Plancherel

L'intégrale qui définit la transformée de Fourier n'est pas définie dans le sens de Lebesgue pour des fonctions générales dans $L^2(\mathbb{R}^n)$; malgré cela, la transformée de Fourier possède une définition naturelle sur cet espace et une théorie particulièrement élégante.
Si on suppose que f est de carré intégrable, alors $\hat{f}$ est aussi de carré intégrable. On a le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Ce théorème affirme que la transformée de Fourier est un opérateur linéaire borné défini sur le sous-ensemble dense $L^1 \cap L^2$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (en fait, c'est une isométrie). Il existe donc une unique extension bornée, $\mathcal{F}$, de cet opérateur sur tout L^2. $\mathcal{F}$ est appelée la *transformée de Fourier sur* L^2. On utilise aussi la notation $\hat{f} = \mathcal{F}f$ pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
En général, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, cette définition de la transformée de Fourier nous donne $\hat{f}$ comme la limite L^2 de la suite $\{\hat{h}_k\}$, où $\{h_k\}$ est une suite quelconque dans $L^1 \cap L^2$ qui converge vers f en norme L^2. Il est convenable de choisir la suite $\{h_k\}$ avec $h_k(t) = f(t)$ pour $|t| \leq k$ et nulle partout ailleurs. Alors $\hat{f}$ est la limite L^2 de la suite de fonctions $\hat{h}_k$ définies par

$$\hat{h}_k(x) = \int_{|t| \leq k} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt.$$

Un opérateur linéaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ qui est une isométrie et agit sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est appelée un opérateur *unitaire*. C'est une conséquence immédiate du Théorème 2.1 que $\mathcal{F}$ est une isométrie. De plus, nous avons la propriété suivante :

Théorème 2.2 *La transformée de Fourier est un opérateur unitaire sur* $L^2(\mathbb{R}^2)$

Théorème 2.3 *L'inverse de la transformée de Fourier,* $\mathcal{F}^{-1}$*, est obtenue en posant* $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = (\mathcal{F}g)(-x) \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Ces deux théorèmes (2.2 et 2.3) forment le *théorème de Plancherel.*

Un autre théorème dû à Plancherel et connu sous le nom de *formule de Plancherel* nous dit la chose suivante :
Soient $f, \hat{f}, g, \hat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\overline{g}dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\overline{\hat{g}}d\xi$$

3 Fonctions diverses

⋆ Membre du comité (1913-1918) et président (1918-1919) de la Société mathématique Suisse.
⋆ Membre (1920-) et vice-président (1927-) de la Commission Euler de la Société helvétique des sciences naturelles.
⋆ Président de la Fondation pour l'avancement des sciences mathématiques en Suisse (1920-).
⋆ Membre du comité de rédaction des Commentarii mathematici helvetici (1929-).
⋆ Membre (1926-1956) et président (1954-1956) de la Commission fédérale de maturité.
⋆ Président de la Centrale suisse du service volontaire de travail (1935-1946).
⋆ Président du 2^e^ congrès international du service de travail, Seelisberg (Uri), septembre 1937.
⋆ Membre du comité (1913-1920) et président (1915-1920) de la Société fribourgeoise des sciences naturelles.
⋆ Vice-président du Comité d'organisation et du Comité exécutif du Congrès international des mathématiciens de Zurich (1932).
⋆ Délégué de l'Ecole polytechnique fédérale à la Commission suisse de coopération intellectuelle (1927-1941).
⋆ Expert scientifique de la société des Nations (1935-1938).

⋆ Président du groupe de Fribourg de la Nouvelle Société helvétique (1918-1920).
⋆ Membre du Conseil général de la ville de Fribourg (1918-1921).
⋆ Membre de la Zentralschulpflege, de la Kreisschulpflege Zürichberg et de la Commission de surveillance de la Gewerbeschule der Stadt Zurich (1939-1945).
⋆ Président de la Mission catholique française de Zurich (1938-1963).
⋆ Président central du secours suisse d'hiver (1948-1967).
⋆ Président du Comité exécutif de l'Action des universités suisses en faveur de leurs étudiants hongrois réfugiés (1958-1963).

4 Sociétés scientifiques

Membre des sociétés scientifiques suivantes :
⋆ Société mathématique suisse.
⋆ Société fribourgeoise des sciences naturelles.
⋆ Société helvétique des Sciences naturelles.
⋆ Deutsche Mathematikervereinigung.
⋆ Circolo matematico di Palermo.
⋆ American mathematical Society.

5 Distinctions

⋆ Membre correspondant de la Société des sciences de Coimbra (1925).
⋆ Membre honoraire de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève (1940).
⋆ Membre étranger de l'Académie royale des sciences de Turin (1940).
⋆ Membre honoraire de la Société fribourgeoise des sciences naturelles (1943) et de la Société mathématique Suisse (1954).

6 Publications

<u>1908</u>
⋆ Sur les congruences (mod 2^m) relatives au nombre des classes des formes quadratiques binaires aux coefficients entiers et à discriminant négatif.
Thèse de doctorat, Fribourg 1907.

1909

⋆ Note sur les équations intégrales singulières.
⋆ Resolvante einer quadratischen Form und Auflösung linearer Gleichungen von unendlich vielen Variabeln.
⋆ Ueber singuläre Integralgleichungen.
⋆ Integraldarstellungen willkürlicher Funktionen.

1910

⋆ Sur la représentation d'une fonction arbitraire par une intégrale définie.
⋆ Sätze über Systeme beschränkter Orthogonalfunktionen.
⋆ Remarques sur l'intégration de l'équation $\triangle u = 0$.
⋆ Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies.
Thèse d'habilitation présentée à la Faculté des sciences de l'Université de Genève.

1911

⋆ Sur l'application aux séries de Laplace du procédé de sommation de M. de la Vallée Poussin.
⋆ De la sommation des séries de Legendre 1912
⋆ Sur la sommation des séries de Laplace de de Legendre.
⋆ Sur l'incompatibilité de l'hypothèse ergodique et des équations d'Hamilton.
⋆ La théorie des équations intégrales.
Conférence donnée à la réunion de la Société mathématique suisse à Berne, le 10 décembre 1911.
⋆ Unicité du développement d'une fonction en série de polynomes de Legendre et expression anaytique des coefficients de ce développement.
⋆ Les problèmes de Cantor et de Dubois-Reymond dans la théorie des polynomes de Legendre.

1913

⋆ Zur Konvergenztheorie der Integrale $\lim_{z\to\infty} \int_0^z f(x) \cos xy\ dx$.
⋆ Beweis der Unmöglichkeit ergodischer mechanischer Systeme.
⋆ Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales.

1914

⋆ Les problèmes de Cantor et de Dubois-Reymond dans la théorie des séries de polynomes de Legendre.

1915

⋆ Sur la convergence et la sommation par les moyennes de Cesâro.

1918

⋆ Sur l'unicité du développement en série de polynoms de Legendre.

1919

⋆ Sur la méthode d'intégration de Ritz.
⋆ Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de fonctions sphériques.

1920

⋆ Remarks on the Note "On the Fourier constants" extracted from the correspondance between M. Plancherel and K. Ogura.

⋆ Sur le calcul des seiches de nos lacs.

1922

⋆ Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de polynomes de Legendre et en série de fonctions de Bessel.

1923

⋆ Le passage à la limite des équations aux différences aux équations différentielles dans les problèmes aux limites.

⋆ Démonstraction du théorème de Riesz-Fischer et du théorème de Weyl sur les suites convergeant en moyenne.

1924

⋆ Sur la méthode d'intégration de Ritz.

1925

⋆ Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel.

⋆ Sur les séries de fonctions orthogonales.

⋆ Le développement de la théorie des séries trigonométriques dans le dernier quart de siècle.

Rapport présenté à la réunion de la Sociétét math. suisse, tenue à Lugano, le 22 avril 1924.

1928

⋆ Sur le rôle de la transformation de Laplace dans l'intégration d'une classe de problèmes mixtes du type hyperbolique et sur les développements en séries d'un couple de fonctions arbitraires.

⋆ Sur le développement d'un couple de fonctions arbitraires en séries de fonctions fondamentales d'un problème aux limites du type hyperbolique.

⋆ Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite.

1929

⋆ Sur les valeurs asymptotiques des polynomes d'Hermite.

⋆ Formule de Parseval e transformations fonctionnelles orthogonales.

1931

⋆ Sur les valeurs moyennes des fonctions réelles définies pour toutes les valeurs de la variable. (En collaboration avec G. Polya)

1933

⋆ Sur les formules de réciprocité du type de Fourier.

1936

⋆ Sur les systèmes isogonaux de courbes dont le rapport des courbes est constant.

1937

⋆ Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. (En collaboration avec

G. Polya)
⋆ Note sur les transformations linéaires et les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables.
⋆ Quelques remarques à propos d'une note de M. G. H. Hardy "The resolvent of a Fourier kernel".
⋆ Sur le calcul du potentiel de l'ellipsoide homogène par la méthode du facteru de discontinuité.
<u>1938</u>
⋆ Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples. (En collaboration avec G. Polya)
<u>1940</u>
⋆ Quelques remarques sur la théorie des transformations linéaires bornées de fonctions de plusieurs variables dans les espaces fonctionnels L.
⋆ Quelques remarques sur les transformations de Fourier des fonctions de plusieurs variables.
⋆ Méthodes d'obtention de formules asymptotiques.
<u>1945</u>
⋆ Sur la convergence en moyenne des suites de solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire et de type elliptique.

Références

[1] J.-P. Pier, *L'analyse harmonique son développement historique*, Masson, 1990

[2] Siegfried Gottwald, Hans-Joachim Ilgands, Karl-Heinz Schlote, *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Verlag Harri Deutsch

[3] Différents documents fournis par Albert C. Plancherel

[4] Antonio Cañada Villar, *Series de Fourier y aplicaciones*, Pirámide

[5] Elias M. Stein, Guido Weiss, *Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces*, Princeton university press, 1971